



Uplifting Mathematics for All

Guia didàctica

Punts que exploten

(Exploding Dots™)

Experiència 2:

Eureka!

Visió general	2
Expliquem la màquina $1 \leftarrow 2$	3
Expliquem més màquines	5
Parlem com la màquina $1 \leftarrow 10$	6
Material A: <i>Expliquem les màquines</i>	8
Solucions a les preguntes de «Material A»	10
Material B: <i>Exploracions brutals</i>	11

Recursos relacionats

- Podeu accedir als vídeos i més recursos a [Exploding Dots - Global Math Project](#).
- Accedeix a [actividades guiadas en Desmos](#).
- Juga en línia amb el giny de [Dhimad](#) (inclou àlgebra).

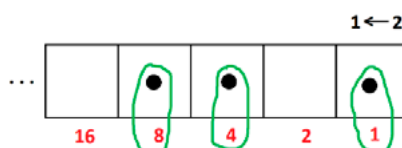
Visió general

Objectius de l'alumne

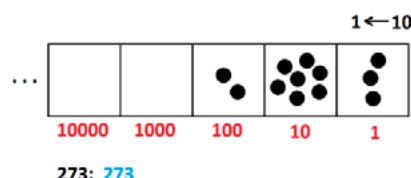
Els alumnes descobreixen que els codis de les màquines de punts i caselles són les representacions dels nombres en diferents bases. Els codis de la màquina $1 \leftarrow 2$ són les representacions binàries (base dos) dels nombres, els codis de la màquina $1 \leftarrow 3$ són les representacions ternàries (base tres) dels nombres i els codis de la màquina $1 \leftarrow 10$ són les representacions en base deu que ens són tan familiars.

Breu resum de l'experiència

En una màquina $1 \leftarrow 2$, un parell de punts en qualsevol casella equivalen a un únic punt a la casella de l'esquerra. Com que els punts de la casella de més a la dreta han de valer 1, el valor de cada punt de les caselles següents ha de ser el resultat d'un procés de duplicació. Ara podem veure clarament que el codi **1101** de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 13, per exemple, és correcte: el 13 és un 8, un 4 i un 1.



La màquina $1 \leftarrow 3$ dona les representacions ternàries dels nombres. La màquina $1 \leftarrow 10$ dona les representacions de nombres en base deu que ens són tan familiars.



Fins i tot en el nostre idioma tenim les representacions en base deu.

273 = dos-cents setanta-tres

Introducció

Podeu veure el vídeo de benvinguda, en què James introdueix aquesta experiència, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [0:38 minuts].



Explicuem la màquina $1 \leftarrow 2$

Les tres lliçons principals d'aquesta experiència passen molt ràpides. James té un vídeo en què s'inclouen totes tres, aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [8:42 minuts].

Aquí hi ha el guió que segueix James quan explica la lliçó a la pissarra. No cal dir que podeu adaptar-lo com més us convingui. Al vídeo podreu veure quan i com dibuixa James els diagrames i com els va ampliant.

Molt bé. Ha arribat el moment d'explicar què fan les màquines realment. (Ja ho heu endevinat vosaltres?)

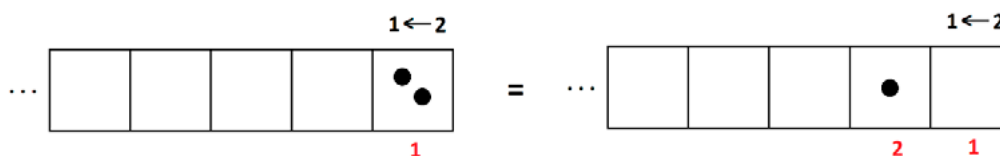
Tornem a la màquina $1 \leftarrow 2$ i, primer que tot, mirem d'entendre quina és la finalitat d'aquest curiós artefacte. Recordeu que segueix la regla:

Quan tenim dos punts en una casella, «exploten», és a dir, desapareixen, i són substituïts per un punt a la casella de l'esquerra.

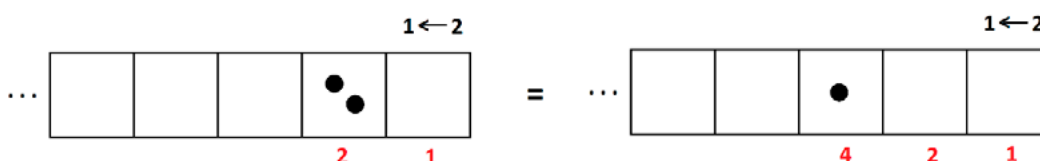
I aquesta màquina està dissenyada perquè els punts de la casella de més a la dreta sempre valguin 1.



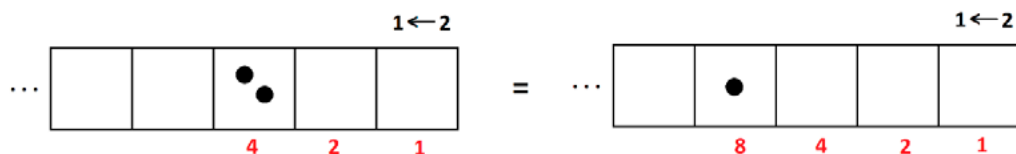
Amb una explosió, dos punts a la casella de més a la dreta equivalen a un punt a la següent casella de l'esquerra. I com que cada punt de la casella de més a la dreta val 1, cada punt situat un lloc més enllà ha de valer dos 1, és a dir, 2.



I dos punts a la segona casella equivalen a un punt a la casella de l'esquerra. Aquest punt ha de valer dos 2, és a dir, 4.




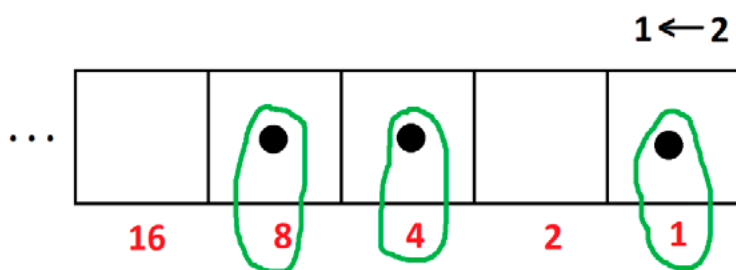
I dos 4 fan que el valor d'un punt a la casella següent sigui 8.



I dos 8 fan 16, dos 16 fan 32, dos 32 fan 64, i així successivament.

De vegades, als alumnes els agrada fer llistes de dobles dels nombres. Aproveiteu-ho per passar-vos-ho bé, si és el cas. (Jo, al cap d'una estona, acostumo a fer veure que m'estic avorrint, i així podem donar el joc per acabat...)

 Hem vist abans que el codi per al 13 en una màquina $1 \leftarrow 2$ és 1101 . Ara podem veure que això és del tot correcte: un 8 i un 4, i cap 2 i un 1 fan 13.



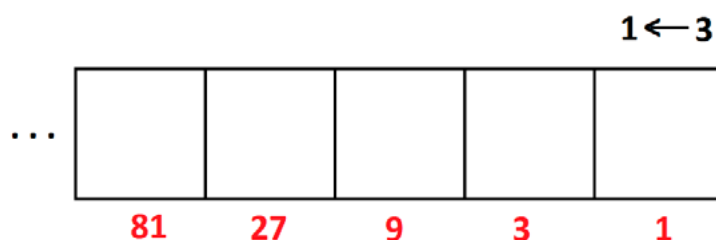
Els codis $1 \leftarrow 2$ per als nombres s'anomenen *representacions binàries* dels nombres (el prefix *bi-* significa 'dos'). També reben el nom de *representacions en base dos*. Quan s'escriuen nombres en binari, només s'utilitzen dos símbols: 0 i 1.

Els ordinadors funcionen amb interruptors elèctrics que estan engegats o apagats. Per tant, en informàtica és natural codificar tota l'aritmètica en un codi format per només dos símbols: per exemple, 1 per a «engegat» i 0 per a «apagat». Així, la base dos, binària, és la base adequada en l'àmbit de la informàtica.

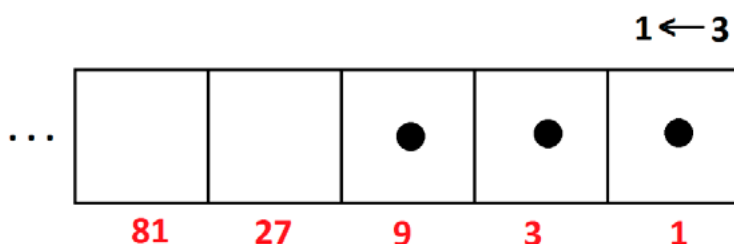
Expliquem més màquines

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [8:42 minuts]

En una màquina $1 \leftarrow 3$, tres punts en qualsevol casella equivalen a un únic punt a la casella de l'esquerra. (I, de nou, cada punt situat a la casella de més a la dreta val 1.) En aquesta màquina obtenim els valors dels punts quan observem que tres 1 fan 3, tres 3 fan 9, tres 9 fan 27, i així successivament.



En algun moment hem dit que el codi $1 \leftarrow 3$ per a 13 és *III*. I ara veiem que això és correcte: un 9 i un 3 i un 1 fan 13, efectivament.



Els codis de la màquina $1 \leftarrow 3$ s'anomenen *representacions ternàries* o *en base tres* dels nombres. Només calen els tres símbols 0, 1 i 2 per representar nombres en aquest sistema.

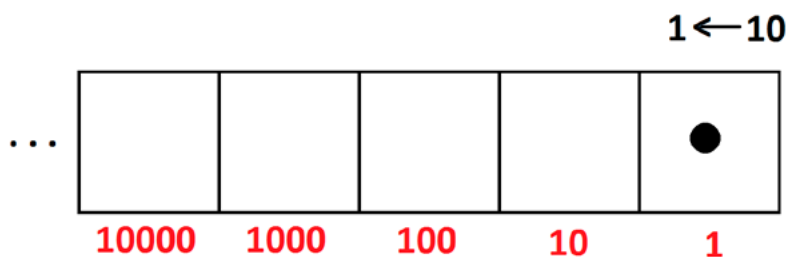
Si voleu, podeu compartir l'enunciat següent:

Els científics debaten la idea de crear ordinadors òptics, basats en llum polaritzada: pot ser llum que viatja en un sol pla, o en un pla perpendicular, o bé pot no haver-hi llum. En aquests ordinadors, el sistema notacional més idoni seria l'aritmètica en base tres.

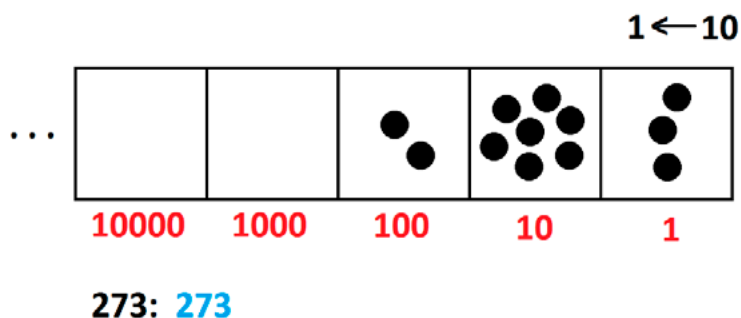
Parlem com la màquina $1 \leftarrow 10$

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [8:42 minuts]

I, finalment, per a una màquina $1 \leftarrow 10$ observem que deu 1 fan 10, deu 10 fan 100, deu 100 fan 1000, i així successivament. Els valors dels punts d'una màquina $1 \leftarrow 10$ són uns, deus, cents, mils, etc.



Ja vam veure que el codi del nombre 273 en una màquina $1 \leftarrow 10$ és 273, i això és del tot correcte: 273 és dos 100, set 10 i tres 1.



De fet, fins i tot parlem l'idioma d'una màquina $1 \leftarrow 10$. Quan escrivim 273 en lletres, fem:

273 = dos-cents setanta-tres

Literalment diem: dos 100, set 10 (-ta significa 'deu') i 3.

Així doncs, mitjançant aquesta història inventada de punts i caselles hem descobert el valor posicional i les bases dels nombres: base dos, base tres, base deu, i així successivament. I la societat ha decidit parlar l'idioma de la màquina en base deu.



Per què pensem que els humans tenim predilecció per la màquina $1 \leftarrow 10$? Per què ens agrada el número 10 per comptar?



Una resposta podria ser per la nostra fisiologia humana: naixem amb deu dits a les mans. Molts historiadors opinen que aquest podria ser el motiu pel qual els humans hem mostrat preferència per la base deu.

Algunes cultures del planeta han utilitzat la base vint. Per què penseu que han triat aquest nombre?

De fet, en la cultura europea occidental d'avui es poden trobar vestigis de pensament en base vint. Per exemple, en francès el nombre 87 es pronuncia i s'escriu *quatre-vingt-sept*, que, traduït paraula per paraula, seria «quatre vints set». Als Estats Units, el famós discurs de Gettysburg d'Abraham Lincoln comença així: «Four score and seven years ago» (ara fa vuitanta-set anys). És a dir, literalment, «Fa quatre-vints i set anys».

Resulta que els marcians tenen quatre dits en cada una de les dues mans. Quina base us sembla que fan servir en la seva societat? Probablement, la base vuit.

Molt bé. Ja hem assolit l'objectiu d'aquesta lliçó. Hem descobert el valor posicional en base deu per escriure nombres, i hem vist el seu context en la història completa del valor posicional. Resulta que als humans ens agrada la base deu en concret perquè és el nombre de dits que en principi tenim la majoria de nosaltres.



Material A: Expliquem les màquines

Utilitzeu el material que trobareu a continuació per als alumnes que vulguin practicar amb les preguntes d'aquesta lliçó i reflexionar-hi després a casa. NO són deures, és totalment opcional. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 2.*)

Punts que exploten

Experiència 2: Eureka!

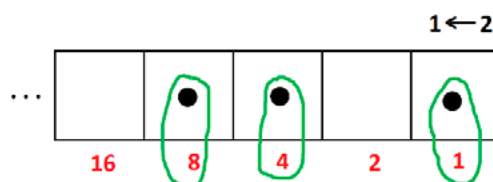
Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material A: Expliquem les màquines

En una màquina $1 \leftarrow 2$, un parell de punts en qualsevol casella equivalen a un únic punt a la casella de l'esquerra. Com que els punts de la casella de més a la dreta valen 1, els de les caselles següents valen 2, 4, 8, 16, i així successivament.

Podem veure que el codi 1101 de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 13, per exemple, és correcte: el 13 és un 8, un 4 i un 1.



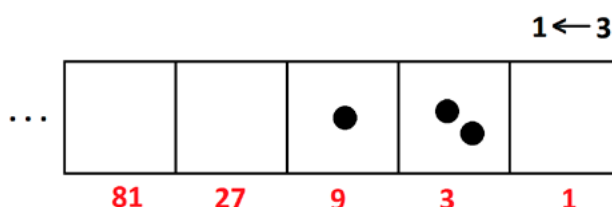
Aquí teniu algunes preguntes que podeu intentar respondre, si voleu.

1. Quin nombre té el codi 100101 en la màquina $1 \leftarrow 2$?
2. Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 200?

En una màquina $1 \leftarrow 3$, tres punts en qualsevol casella equivalen a un únic punt a la casella de l'esquerra. (I, de nou, cada punt situat a la casella de més a la dreta val 1.) En aquesta màquina obtenim els valors dels punts quan observem que tres 1 fan 3, tres 3 fan 9, tres 9 fan 27, i així successivament.



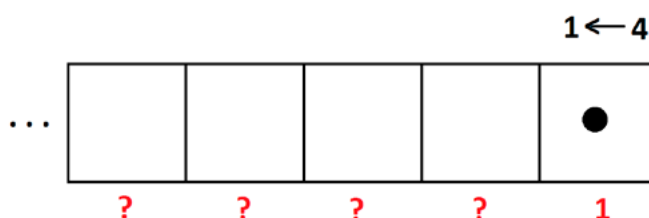
3. a) Quin és el valor d'un punt situat a la casella de l'esquerra després dels que veiem a la màquina?
- b) El codi $1 \leftarrow 3$ per al 15 és 120. Veiem que això és correcte, ja que un 9 i dos 3 fan 15, efectivament.



Podem dir també que el codi $1 \leftarrow 3$ per a 15 és 0120? És a dir, es poden posar zeros al començament d'aquests codis? I al final dels codis? Són optatius?

Podem eliminar l'últim zero del codi 120 de 15 i escriure simplement 12?

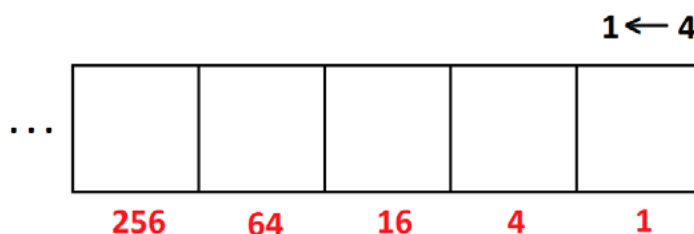
- c) Quin nombre té el codi 21002 en la màquina $1 \leftarrow 3$?
- d) Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 3$ per a 200?
4. a) En el sistema $1 \leftarrow 4$, quatre punts en qualsevol casella equivalen a un únic punt a la casella de l'esquerra. Quin valor té un punt en cada casella?



- b) Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 4$ per a 29?
- c) Quin nombre té el codi 132 en una màquina $1 \leftarrow 4$?
5. Resulta que els venusians tenen sis dits en cada una de les dues mans. Quina base us sembla que fan servir en la seva societat?

Solucions a les preguntes de «Material A»

1. El 37. És un 32, un 4 i un 1.
2. És 11001000.
3. a) Cada punt a la casella de l'esquerra val tres 81, és a dir, 243.
b) Sí, podem afegir un zero al començament del codi. Això indicaria que no hi ha cap 27, la qual cosa és del tot correcta. Ara bé, esborrar el zero a la dreta ja no és tan senzill. 120 és el codi de 15 (un 9 i dos 3), però 12 és el codi de 5 (un 3 i dos 1).
c) El 199. (Dos 81, un 27 i dos 1.)
És 21102.
4. a) Per a una màquina $1 \leftarrow 4$, les caselles tenen els valors següents:



- b) El nombre 29 té el codi 131 en una màquina $1 \leftarrow 4$.
- c) El 30. (És un més que el codi per al 29!)
5. Pot ser que els venusians utilitzin la base dotze? Això vol dir que necessitaran dotze símbols diferents per escriure nombres.
Per cert, us heu adonat que nosaltres utilitzem deu símbols —1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 0— i que els anomenem *dígits*? Aquest terme procedeix de la mateixa arrel llatina *digitus* que la nostra paraula *dit*.



Material B: Exploracions brutals

Utilitzeu el material següent per facilitar-lo als alumnes que vulguin reflexionar després a casa amb preguntes profundes relacionades amb aquesta experiència. NO són deures, és totalment opcional, però podria servir de font per a futurs projectes dels alumnes. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten*. Experiència 2.)

Punts que exploten

Experiència 2: Eureka!

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:

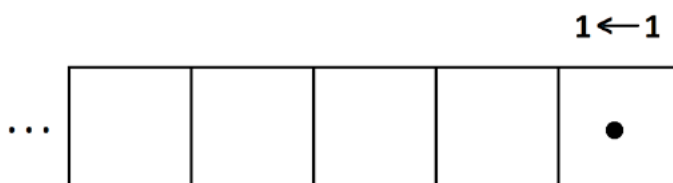
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: Exploracions brutals

A sota teniu algunes investigacions sobre «grans preguntes»: podeu explorar-les o bé simplement reflexionar-hi. Divertiu-vos!

EXPLORACIÓ 1: PODEN LES MÀQUINES «ANAR A L'INREVÉS»?

En Jan decideix jugar amb una màquina que segueix la regla $1 \leftarrow 1$. Posa un punt en la casella de més a la dreta. Què passa, aleshores? Assumim que hi ha infinites caselles cap a l'esquerra.



La Susanna juga amb una màquina que segueix la regla $2 \leftarrow 1$. Posa un punt en la casella de més a la dreta. Què li passa?

Trobeu que aquestes màquines són interessants? Penseu que val la pena estudiar-les?

EXPLORACIÓ 2: PODEM JUGAR AMB MÀQUINES ESTRANYES?

En Marc decideix jugar amb una màquina que segueix la regla $2 \leftarrow 3$.

- Descriu què passa quan hi ha tres punts en una casella.
- Esbrineu els codis de la màquina $2 \leftarrow 3$ per als nombres que van de l'1 al 30. Hi ha cap patró?
- El codi que dona aquesta màquina per al 10 és 2101. Busqueu el vostre codi per al 20. Considereu que pot ser la resposta al «deu més deu»? El vostre codi per al 30 s'assembla a la resposta al «deu més deu més deu»?

Observació: Explorarem aquest estranya màquina $2 \leftarrow 3$ a l'experiència 9. És molt i molt estranya!

